

La modélisation au cœur de la démarche scientifique et à la confluence des disciplines

Claudine Schmidt-Lainé et Alain Pavé

Résumé : *le terme « modèle » est apparu dans le langage scientifique dans les années 1960 et « modélisation » dans les années 1970. L'objet et la démarche ont conquis en une trentaine d'années presque tous les domaines de la science, le plus souvent pour le meilleur, mais quelquefois pour le moins bon, notamment lorsqu'on veut forcer la réalité au modèle nécessairement simplificateur. En revanche, l'intégration du modèle à la méthode expérimentale assure un lien fort avec la réalité. On tente ici de recenser le rôle du modèle dans les grands secteurs scientifiques, des sciences physiques aux sciences de l'homme et de la société. En fin de compte se dégage une méthodologie commune sortant des carcans traditionnels des disciplines.*

L'utilisation de formules ou de figures abstraites, principalement mathématiques, pour représenter des phénomènes et des objets naturels ou élaborés par l'homme accompagne le développement des sciences, de l'ingénierie et de la gestion. La principale explication de ce succès vient des raisonnements, des calculs et des déductions auxquelles se prêtent ces représentations. Ils permettent, par exemple, de prévoir une situation future, comme la position d'une planète sur son orbite, de trouver des équivalences comme l'égalité ou la similitude de figures géométriques, de suggérer des hypothèses, comme l'existence d'une nouvelle particule non encore observée, de calculer et de dessiner pour fabriquer et faire fonctionner des machines ou pour construire des bâtiments, et de comptabiliser pour évaluer les stocks et les échanges, pour estimer les coûts et les bénéfices. En pratique, la création d'un cercle vertueux modélisation-observation-expérimentation permet de faire progresser le modèle et d'affiner la démarche expérimentale tant pour tester des hypothèses que pour doter le modèle de propriétés requises pour une utilisation future, par exemple pour la prévision météorologique, pour le contrôle d'un procédé industriel, ou encore pour définir la posologie à adopter dans le cadre d'un traitement médical.

En retour, les sciences et les techniques ont aussi contribué au développement des mathématiques. Cependant, ce tableau doit être nuancé. Tous les secteurs scientifiques et techniques n'ont ni utilisé ces outils formels, ni contribué à leur développement à degré égal. La physique a été la première concernée ; longtemps les progrès des mathématiques ont d'ailleurs été liés à ceux de cette discipline. De leur côté, la technique, l'architecture, l'aménagement des agglomérations et le génie militaire ont été très tôt impliqués. Pour la gestion, il s'agissait de compter, de faire des bilans, voire quelques prévisions d'évolution de stocks de produits alimentaires : beaucoup d'archives écrites des premières civilisations portent des traces de cette activité comptable.

Fort du succès remporté, d'autres disciplines scientifiques et secteurs d'activités ont tenté d'utiliser ces outils, par exemple les sciences de la vie et les sciences sociales. Dans ces domaines, l'adéquation de l'objet mathématique et de ses propriétés, en particulier

numériques, avec ce qu'il est censé représenté est plus difficile à obtenir qu'en physique, ou même qu'en chimie, disciplines dans lesquelles l'utilisation de grandeurs invariantes, comme les bilans de masse et d'énergie, est d'un grand secours. Qui ne se souvient de la « loi d'Ohm », de la « loi de Newton », de la « loi des gaz parfaits », de « la loi d'action de masse » ? Cependant la complexité des objets réels actuellement étudiés (climat et système Terre, systèmes technologiques élaborés, systèmes vivants, systèmes sociaux) conduit à des représentations difficiles à manipuler par des méthodes directes de l'analyse mathématique. Elles ont aussi un moins bon degré d'exactitude que les lois de la physique traditionnelle. Le calcul et l'analyse numériques, qui se développent parallèlement aux progrès de l'informatique et des moyens de calcul, viennent à la rescousse, mais demandent aussi à être maîtrisés. De plus certains problèmes résistent à un traitement mathématique. Par exemple, comment formaliser les comportements d'une société animale et... d'une société humaine ? Là encore la simulation nous donne de nouveaux outils.

Ainsi, la notion de *modèle* a émergé dans les années 1960, affaiblissant et assouplissant la notion de loi, commune à l'époque. Dès lors la construction d'un modèle nécessite de définir des domaines de validité et d'incertitude. Le modèle a un statut transitoire alors que la loi est établie sur le long terme, quasi gravée ans le marbre. Il peut être modifié, amélioré. Pour modéliser d'autres représentations formelles que mathématiques sont aussi utilisables. L'art d'élaborer et d'utiliser un modèle, puis de codifier les relations avec l'expérience et les observations, a donné naissance à une pratique : *la modélisation*. Cette pratique s'érige en véritable méthodologie.

Une revue chronologique de la modélisation mathématique met en évidence les évolutions disciplinaires des autres secteurs scientifiques et techniques. C'est pourquoi, et après une courte présentation du rôle du modèle dans la démarche scientifique et technique, la présentation de ce texte est faite selon ces secteurs.

Les différentes fonctions du modèle : bien évaluer son rôle et ses limites

Le modèle est tout d'abord un outil dans le processus d'acquisition des connaissances. Il doit avoir un sens : ses termes doivent être interprétables. Par exemple, pour un modèle démographique simple, traduisant l'évolution d'une population en fonction du temps, la variable sera la taille ou la densité de cette population et les paramètres le taux de reproduction et le taux de mortalité. Un modèle à un moment donné d'un travail de recherche contient toute l'information pertinente connue à ce moment. On apprend quelque chose de plus s'il est mis en défaut. Il s'agit alors de le modifier pour prendre en compte cette nouvelle information et à nouveau de le confronter à un autre cas de figure.

Pour l'élaboration ou le contrôle d'un système technique ou pour faire des prévisions, donc à des fins normatives, le modèle correspondant doit être validé pour l'utilisation qui en sera faite. Son domaine d'utilisation et de précision, c'est-à-dire un domaine de « confiance », est bien défini. Il ne doit pas pouvoir être mis en défaut dans ce domaine. En revanche, aucune assurance n'est donnée sur ses performances en dehors.

Enfin, sous une forme assez générale, comme les modèles de la statistique, ou plus spécifique, représentant un mécanisme précis, l'utilisation de ces modèles permet d'analyser des données expérimentales et d'optimiser des expériences. Par exemple, l'analyse des données permet de repérer des structures particulières dans de grands tableaux de résultats, comme la présence de groupes homogènes dans une population mais qui se distinguent les uns de autres. Ainsi, peut-on faire des tests de sensibilité des différentes souches bactériennes à divers antibiotiques et identifier des groupes de sensibilité, des groupes de résistances et des corrélations entre ces groupes. Autre exemple, un modèle spécifique, mécaniste, d'un processus biologique, par exemple de dynamique de populations bactériennes, peut être utilisé pour analyser les différences d'évolution de ces populations dans diverses conditions de milieu. Ces différences se traduiront par des valeurs distinctes des paramètres du modèle et seront directement interprétables en termes biologiques (taux de croissance, taux de mortalité).

En tout état de cause un modèle est conçu pour une utilisation particulière, il y a lieu de bien en préciser la nature et les limites.

Les mathématiques : premières concernées

La notion de modèle a été et est encore liée aux formalismes mathématiques. De plus, les méthodes nécessaires à l'étude et à la mise en œuvre de modèles sont issues des mathématiques, y compris celles qui relèvent de la simulation numérique. Même si certains autres formalismes sont maintenant utilisés, le recours aux représentations mathématiques sur lesquelles des propriétés peuvent être solidement établies, est recommandé, même au prix de grandes simplifications.

Après une phase où les mathématiques ont été développées et utilisées pour résoudre quelques problèmes ponctuels, réels, comme la géométrie pour l'architecture, l'arithmétique pour la gestion, ou spéculatifs, comme celui abordé par Fibonacci de la croissance d'une population abstraite de lapins (cf. illustration). Les premiers modèles mathématiques, même s'ils n'en portent pas le nom, remontent à l'apparition de la notion de dérivée au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles avec Leibnitz et les frères Bernoulli. Les questions qu'ils traitent sont essentiellement celles de la mécanique céleste. Les modèles sont alors des « systèmes dynamiques » simples. Les siècles suivants verront se développer tous les modèles liés à la mécanique, à l'électricité, à l'électromagnétisme, à l'optique, puis à la chimie. Des avancées exceptionnelles des équations aux dérivées partielles (EDP) trouveront leur champ naturel d'application dans la mécanique des fluides ; de façon complémentaire, les développements technologiques de la fin du XX^e (transports terrestres et aériens, météorologie, exploration et utilisation de l'espace) s'appuieront sur les progrès de l'analyse numérique fournissant des modèles discrets utilisant les nouvelles architectures informatique.

Ce n'est qu'il n'y a relativement peu de temps que les mathématiques se sont intéressées aux sciences du vivant et aux sciences de la société, notamment l'économie, et que réciproquement ces secteurs y ont été sensibles. Les modèles exprimés sous forme

d'équations différentielles ordinaires et d'équations aux dérivées partielles sont privilégiés pour représenter la dynamique des systèmes biologiques, écologiques, économiques et techniques. Ils permettent de représenter les évolutions au cours du temps, les phénomènes transitoires mais également les comportements prévisibles à court et à long terme. Il ne faut pas non plus sous-estimer les modèles probabilistes, efficaces pour représenter des phénomènes à petite échelle, par exemple la démographie de petites populations. Ils sont aussi à la base de nombreuses méthodes de la statistique.

Dans les sciences physiques : de la loi au modèle

Les liens entre physique et mathématiques ont été et restent très forts, les deux disciplines s'alimentant réciproquement. L'adéquation de l'équation à la réalité étudiée est très bonne et les écarts observés sont imputables, soit à des descriptions trop rudimentaires des phénomènes, soit aux erreurs de mesures. Il suffit donc d'améliorer la représentation ou la mesure. Cependant, la curiosité des chercheurs aidant et le besoin de comprendre d'autres phénomènes conduit à des expressions trop complexes pour être maîtrisées par les outils de l'analyse classique et sont alors abordées lors de simulations numériques. Progressivement, dans ce secteur scientifique, le terme de loi est abandonné pour laisser la place à celui de « modèle ». Ainsi, la physique des particules et des hautes énergies en a conscience en parlant de « modèle standard » et non de « loi standard ». D'autres qui avaient pudiquement gardé le nom d'équation ont accédé à ce nouveau statut. La célèbre équation de Navier-Stokes de la dynamique des fluides et ses divers avatars, comme l'équation de Saint-Venant, sont ainsi devenus des modèles¹. En tout état de cause, nécessité faisant loi, le besoin d'aborder de nouveaux problèmes, comme celui de la dynamique du climat global, a conduit à l'élaboration de modèles, qui, même simplifiés, sont de plus en plus complexes, fortement non linéaires et dont la mise en œuvre demande de gros moyens de calcul et des méthodes numériques adaptées.

De la chimie de l'état d'équilibre aux systèmes oscillants : les vertus de la modélisation

Les modèles de la chimie s'appuient sur les bases de la thermodynamique et de la cinétique chimique. La réversibilité et l'état d'équilibre sont des notions clés. La loi d'action de masse reliant la vitesse d'une réaction à la concentration des réactifs en présence décrit bien la dynamique de ces réactions. Les bilans énergétiques sont régis par les lois de la thermodynamique. Peu ou prou, après une phase transitoire où se déroule une réaction, l'issue est un état d'équilibre : plus rien ne bouge. Mais Boris Belousov, un chimiste russe, en 1951, décrit une réaction qui peut présenter des oscillations entretenues. La publication est refusée parce que contradictoire avec le second principe de la thermodynamique, selon les *referees*. Cette expérience est ensuite reprise par Anatol Zhabotinsky, en 1961, et enfin

¹ Pour la petite histoire, l'équation de Saint-Venant a été établie avant celle de Navier-Stokes. Ce n'est qu'ultérieurement qu'il a été démontré qu'elle en était une simplification. C'est d'ailleurs aussi le cas dans d'autres domaines de la physique où le modèle simple a précédé un modèle général, par exemple pour la mécanique newtonienne et la mécanique relativiste.

publiée². Ilya Prigogine a levé la contradiction en 1977 en montrant que des systèmes de réactifs suffisamment complexes et loin de leur état d'équilibre peuvent exhiber de tels comportements oscillants. Beaucoup de chimistes mettent alors au point des dispositifs expérimentaux pour reproduire des réactions du même type. Simultanément des études théoriques de ces systèmes oscillants sont très actives. L'un des enjeux est de montrer qu'au delà de ces oscillations, des régimes chaotiques peuvent apparaître aussi bien dans la réalité qu'à travers le modèle. C'est sans doute l'un des domaines de la chimie où la relation entre modèle et théorie a été la plus stimulante. Cette chimie loin de l'état d'équilibre est vue par beaucoup comme permettant de mieux comprendre les systèmes biologiques. Dans la même mouvance, la modélisation de réactions non linéaires et couplant la physique et la chimie du processus, a fait beaucoup de progrès. C'est le cas de la combustion. Les applications sont multiples, par exemple pour la conception des propulseurs à poudre des lanceurs comme Ariane 5.

Les sciences de l'ingénieur : les modèles au centre de l'action

Ce secteur, qui s'intéresse aux systèmes techniques, est un grand utilisateur et concepteur de modèles, intégrant des lois de la physique et de la mécanique. Aussi au début parlait-on de « sciences physiques pour l'ingénieur ». Mais les systèmes techniques actuels, notamment les procédés industriels de la chimie et des biotechnologies demandent une intégration plus large de ces domaines. C'est pourquoi SPI est devenu sciences pour l'ingénieur. Cependant, deux disciplines de SPI apportent une contribution originale : l'automatique et l'informatique. L'informatique, nous en parlons par ailleurs, mais cette discipline développe aussi des modèles pour ses besoins propres. L'automatique a produit des contributions originales à la modélisation. Ainsi, la demande du type « problème inverse », c'est-à-dire le calcul des conditions permettant d'atteindre un objectif fixé, conduit à une élaboration théorique originale dite du « contrôle » ou de la « commande optimale ». Des concepts, des modèles et des méthodes, très utiles dans d'autres disciplines comme l'économie ou les sciences biologiques, ont été énoncés et développés à cette occasion. C'est par exemple le cas de l'identifiabilité, de l'observabilité de la commandabilité. Les questions relatives à la sensibilité et à la robustesse des modèles ont été aussi bien étudiées pour les besoins de cette discipline. Comme exemple d'utilisation et d'effets de bord dans d'autres secteurs, on peut retenir l'optimisation des protocoles expérimentaux et la définition des traitements optimaux ou de posologies optimales en agronomie et en médecine.

Ces travaux relèvent du corpus général de l'analyse des systèmes, commune à plusieurs secteurs scientifiques. En l'occurrence et pour les SPI, il s'agit de modéliser pour mieux contrôler ou gérer les systèmes techniques, comme des procédés industriels.

Dans les sciences de la vie : peu de lois et beaucoup de modèles

² B. Belousov et A. Zhabotinskii correspondirent mais ne se rencontrèrent jamais. Ce n'est pas un cas unique, Pascal et Fermat échangèrent de nombreuses lettres mais, malgré leurs intentions réciproques, ne se rencontrèrent jamais (cf. Philippe Picard. Hasard et probabilités. Vuibert, 2007).

En 1966, Pierre-Paul Grassé écrivait dans sa préface à l'ouvrage collectif de Biologie générale (Masson 1966) : « *Les lois biologiques sont complexes, difficiles à énoncer ; leurs expressions mathématiques lourdes et peu maniables. Les exceptions aux règles sont nombreuses, au point parfois d'enlever à la « loi » son caractère général [...] L'introduction du quantitatif est cependant possible dans l'étude de certains phénomènes vitaux, parmi lesquels se place la croissance qui s'exprime par des formules simples. La biométrie est l'ensemble des techniques mathématiques appliquées à la Biologie ; elle connaît de beaux succès et n'a pas épuisé ses possibilités.* ». Il n'a pas montré les mêmes réticences vis-à-vis des « approches mathématiques de la biologie » que celles qu'il avait eues, auparavant, pour la théorie chromosomique de l'hérédité.

Les premiers modèles mathématiques en sciences de la vie ont été des modèles démographiques, non seulement de populations humaines, mais aussi animales, végétales et microbiennes. Le plus ancien est sans nul doute le modèle de Fibonacci trouvé dans le *Liber abaci*, dont la première édition date de 1202 (cf. illustration). Mais il faut attendre le XIX^{ème} siècle pour que soit publiée, par Pierre-François Verhulst, « la loi d'accroissement de la population », appliquée aux populations humaines, plus réaliste que la « loi exponentielle » de Malthus proposée trois décennies auparavant. Cette loi a fait l'objet de multiples applications. De fait, dans notre terminologie actuelle, le terme modèle est plus approprié si tant est que pour représenter des phénomènes démographiques on dispose d'un arsenal de formules différentes et même, dans des cas un peu compliqués, de bons simulateurs informatiques. Parmi les autres modèles, connus et même célèbres, on peut citer le modèle de Monod et ses dérivés, bien adapté aux populations bactériennes, les modèles démographiques probabilistes de Galton-Watson, les modèles d'interactions entre populations de Lotka-Volterra. Le développement « d'une biologie et d'une écologie mathématique » a réellement pris naissance dans les années 1920-1930 comme le suggère le titre d'un ouvrage paru en 1978 : « *The Golden Age of Theoretical Ecology : 1923-1940* », et singulièrement en France comme le prouve son contenu. La notion de système, qui sort très largement du champ des sciences du vivant, doit aussi aux analogies biologiques. Ces sciences ont aussi été parmi les premières clientes de cette théorie. La modélisation fait partie intégrante de ce qu'on appelle « l'analyse des systèmes », suite aux travaux de Norbert Wiener, puis à ceux de Ludwig von Bertalanffy.

Les modèles ont envahi beaucoup d'autres champs des sciences de la vie : génétique des populations, physiologie, écologie, neurosciences, biologie cellulaire et moléculaire, biologie du développement et morphogénèse, génomique. Il en résulte une grande diversité de modèles déterministes, probabilistes et informatiques, auxquels il faut ajouter les modèles de la statistique pour l'analyse des données, les tests d'hypothèses, l'estimation de grandeurs et la précision de ces estimations. On retiendra également la classe originale de modèles issus de la théorie des langages pour la morphogénèse, par exemple les « systèmes de Lindenmayer ».

La modélisation emprunte la plupart de ces méthodes à diverses disciplines : aux mathématiques bien sûr pour l'étude des propriétés des équations et pour les méthodes de calcul numérique, à la statistique pour l'estimation des paramètres et les tests de réfutation

ou de validation, à l'informatique pour la mise en œuvre des algorithmes, pour les restitutions visuelles et pour des outils de modélisation spécifiques. Ces derniers permettent de modéliser des situations difficiles à aborder avec des outils mathématiques, comme le comportement des individus dans une population ou la morphogenèse lors du développement d'organismes.

Aujourd'hui, la communauté se lance dans la modélisation à grande échelle, comme l'ont fait les climatologues pour le climat. Ainsi un programme européen va s'intéresser à la modélisation de la physiologie humaine, et l'on peut s'attendre à une initiative du même type pour la biodiversité à l'échelle globale, absolument nécessaire même si elle est difficile pour aller plus loin que les discours conventionnels sur le sujet. Au niveau génomique, une modélisation intégrée de l'expression du génome est aussi envisagée. De même, les expériences de simulation de processus évolutifs devraient se renforcer. Élaborer et maîtriser des modèles de processus produisant la variabilité des systèmes vivants est sans doute l'un des enjeux les plus importants, notamment pour la modélisation à grande échelle et à long terme de la biodiversité.

Enfin et on l'aura compris, ce domaine des sciences de la vie est en pleine effervescence en termes de modélisation. On peut noter que le secteur de la mécanique et de la physique qui a été le terrain favori des mathématiciens appliqués dans les années 1970-1990 ont peu à peu cédé la place à la biologie et aux modèles de description et de fonctionnement du vivant, des nano-objets jusqu'aux écosystèmes.

Dans les sciences humaines et sociales : à la découverte de la modélisation

L'économie, les sciences de gestion et la démographie, dont nous discutons ci-dessous, ainsi que la linguistique, formalisée au tournant des années 1960, ont recours à la modélisation. Les autres domaines des sciences de l'homme et de la société sont encore peu concernés. La géographie joue cependant un rôle particulier. Ainsi la carte est un modèle de l'espace géographique, mais il est statique. Le formalisme des « chorèmes », découvert par l'école de Montpellier, est une tentative d'intégration de la dynamique des territoires. L'organisation et le traitement de l'information spatialisée sont devenus courants à travers des modèles adéquats. Pour le développement de l'espace urbain et des réseaux entre villes la modélisation multi-agents est très efficace. La géographie historique utilise aussi ce type de modélisation avec succès.

Pour aborder, sinon résoudre, des problèmes de gestion des ressources naturelles, la modélisation multi-agents a aussi été employée. La démarche dite de « modélisation d'accompagnement » nous semble originale : il s'agit, sur le terrain, de modéliser une situation pour aider les acteurs en présence dans un processus de décision, par exemple pour la gestion d'une ressource naturelle comme l'eau. La genèse et l'utilisation incrémentales du modèle, en étroite interaction avec les acteurs sociaux, sont ainsi soigneusement maîtrisées. La théorie de la viabilité apporte également un cadre propre aux modèles de gestion « sous contrainte », notamment environnementale, au centre des problématiques du développement durable.

Le cas spécifiques de la démographie et de l'économie : des modèles... pour quoi faire ?

Ces deux domaines ont été les premiers du secteur SHS à faire appel à la modélisation. Souvenons-nous que le modèle exponentiel de Malthus, exprimé sous la forme d'une progression géométrique, est censé représenter l'évolution d'une population humaine. Comme il prévoit une croissance infinie, il faut bien expliquer les arrêts à la croissance, des ruptures à cette évolution, comme les épidémies, les famines, les guerres, etc. Verhulst, lui, suppose que des mécanismes endogènes aux populations humaines peuvent conduire à un ralentissement spontané. Plus besoin d'espérer des catastrophes pour limiter la croissance. Ce modèle est redécouvert par Pearl aux États-Unis dans les années 1920, qui montre alors qu'il s'ajuste bien aux données de la démographie américaine. Depuis, des modèles plus raffinés ont été élaborés à des fins de prévision. S'ils représentent bien les données, les extrapolations se sont avérées décevantes³.

Pour l'économie, en dehors des aspects comptable et à court terme, les aspects prédictifs restent limités, comme le montre la crise actuelle. On peut être plus sévère : les modèles ont servi de point de repère aux politiques ultra-libérales faisant confiance uniquement au marché pour s'auto-réguler. C'était faire fi des hypothèses ayant été à la base de leur élaboration, notamment sur la rationalité des agents économiques. Mais la faute n'est pas au modèle qui reste d'une grande utilité dans la réflexion théorique, c'est d'avoir voulu croire qu'il représente une réalité complète et pire d'avoir voulu plier la réalité au modèle théorique.

Les modèles météorologiques et climatiques : des processus naturels aux grandes négociations internationales – un exemple pour les sciences de l'environnement

Les questions relatives du « temps qu'il fera demain » et des rythmes saisonniers sont récurrentes dans les sociétés humaines. On le comprend aisément car notre activité, notamment agricole, en dépend. L'histoire est parsemée de disettes et de famines dont beaucoup sont liées aux aléas météorologiques et climatiques. Les tempêtes ont été à l'origine d'accidents et de catastrophes. Il n'est donc pas étonnant que des efforts importants aient été faits pour prévoir les variations météorologiques et climatiques. De plus, depuis une trentaine d'années la crainte de changements climatiques, énoncée dès le XIXe, en des termes voisins, par Joseph Fourier et Svante Arrhénius, s'est avérée fondée.

³ Dans les années 1980 on prévoyait une population mondiale à l'horizon 2050-2100 de 20 milliards d'humains. Aujourd'hui les évaluations ont été revues à la baisse : 9 à 10 milliards, du « double au simple ». On avait sous évalué l'importance des régulations démographiques internes à ces populations dont P.F. Verhulst faisait déjà état en 1845. On notera néanmoins qu'il évaluait la limite « extrême » de la population de la France à 40 millions et de la Belgique à 6 millions et demi (*in* « Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population ». *Mémoire à l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Belgique*. Lu à la séance du 30 novembre 1844 et publié en 1845). Tout bien pesé, pour l'époque c'était assez remarquable.

Un effort sans commune mesure a été fait sur les deux fronts complémentaires : celui des modèles de prévision météorologique, à court terme et locaux, et des modèles climatiques, à long terme, régionaux et globaux.

On s'est vite aperçu que les modèles météorologiques ne peuvent être réduits aux phénomènes locaux de circulation atmosphérique dès qu'on souhaite avoir une prévision au delà de quelques heures, c'est-à-dire ce que pouvait raisonnablement faire les habitants de nos campagnes sur la base du simple bon sens, au moins pour une heure ou deux. De fait, passer de ce bon sens, qui n'est qu'un prolongement linéaire de l'observation immédiate, à une prévision fiable sur une plus longue durée, 1-2 jours, puis une semaine, etc., demande la mobilisation de moyens considérables d'observation sur toute la planète, de modélisation et de calcul, ainsi qu'une vaste coopération internationale. La faute en est la nature fortement non linéaire des processus et la sensibilité aux conditions initiales des modèles, illustrées par le célèbre « effet papillon »⁴. En effet, pour éloigner l'horizon de prévision on est obligé d'intégrer des processus de plus en plus nombreux et lointains du lieu pour lequel sera faite cette prévision.

Que dire alors du climat ? Il ne s'agit pas, bien sûr, de prévoir le temps à Lyon le 25 août 2021, mais d'étudier les évolutions des paramètres climatiques (température, précipitation, vents) en moyenne et leurs intervalles de variations intra et inter annuels, sur le long terme, aux échelles globales, régionales et locales, puis d'envisager les conséquences possibles, les moyens de les anticiper, de les éviter ou de les « gérer ». Ainsi et sur la base de ce qui est fait pour la météorologie, notamment d'une large coopération internationale, mais pour un problème encore plus difficile et beaucoup plus interdisciplinaire, des programmes de recherche, impliquant une large communauté scientifique, sont menés et un groupe d'experts internationaux a été réuni (IPCC : *Intergovernmental Panel on Climate Change*). Ce groupe de plus de mille experts a reçu le prix Nobel de la Paix en 2007. C'est dire l'importance et la reconnaissance de leurs travaux. Le modèle et la modélisation sont au centre de l'activité scientifique, tout est organisé en fonction d'eux. C'est probablement le plus grand effort collectif fait dans ce domaine pendant sa courte histoire. Les résultats ont été décisifs dans les négociations internationales sur la réduction des gaz à effets de serre, conclues, par exemple, par le protocole de Kyoto en 1997.

On peut espérer que l'exemple des recherches sur le climat, la méthode expérimentée et le rôle central de la modélisation servent de référence à d'autres communautés pour les problèmes qui les concernent, par exemple pour l'évolution de la biodiversité aux mêmes échelles et sur le long terme.

Les modèles « interdisciplinaires » et la « modélisation comme trait d'union entre disciplines »⁵

L'une des principales qualités de la modélisation est de faciliter le dialogue entre les disciplines. En parlant le même langage, on se comprend mieux. Il n'en demeure pas moins

⁴ Au passage, cet effet a été la première illustration du « chaos déterministe », soupçonné par les mathématiciens mais pas observé auparavant.

⁵ Claudine Schmidt-Lainé et Alain Pavé. La modélisation comme trait d'union. *Le Figaro*, 11 janvier 1999.

que construire un modèle intégrant des processus étudiés par divers champs disciplinaires n'est pas facile, même si ces processus sont formalisés, ne serait-ce que pour caler les échelles de temps et d'espace et les niveaux de description. Le « couplage de modèles » est encore une aventure. Un modèle réellement intégré relève encore du projet à long terme, si ce n'est de la fiction. Aujourd'hui, c'est sans doute pour le climat, que nous venons d'évoquer, que le problème est le mieux identifié, mais pas encore résolu. Nos collègues travaillent depuis 30 ans sur le sujet, peut-être faut-il encore 30 ans. Gageons que pour la biodiversité, le problème sera au moins aussi difficile.

La modélisation est cependant très efficace dans les recherches interdisciplinaires, comme les recherches sur l'environnement. « L'orchestration » imposée par la construction du modèle nécessite une explicitation des grandeurs caractéristiques des processus intégrés qui diffèrent parfois de plusieurs ordres de grandeurs⁶. Ces grandeurs sont rarement rappelées lorsque les recherches sont disciplinaires, car souvent implicites. Elles doivent impérativement l'être dans la construction interdisciplinaire des modèles. La prise en compte de ces grandeurs va permettre en particulier de détecter les zones et les conditions de fonctionnements pathologiques, le passage par exemple d'un régime régulier et lisse à des coups de boutoirs, à des irrégularités dommageables, à l'image du coup de bélier dans les canalisations d'eau.

Modèles et données : de l'observation et de l'expérimentation

En règle générale, le modèle s'appuie sur la réalité qu'il est censé représenter et sur la question à laquelle il est censé répondre, ne serait-ce que pour donner les conditions aux limites et/ou initiales correctes, des valeurs pour les différents paramètres qui interviennent dans son expression, le contexte et les limites de son utilisation. C'est cette réalité qui au bout du compte a seul pouvoir de vérité. La confrontation des sorties du modèle avec les mesures et les observations est essentielle pour le valider, ou au contraire le réfuter, puis l'améliorer s'il y a lieu. C'est ainsi qu'on peut définir une boucle vertueuse entre modèle, d'une part, observation et expérimentation, d'autre part, c'est-à-dire l'établissement d'une relation « dialectique » entre modélisation et expérimentation.

Parfois, il se peut que le modèle ait raison avant l'observation, c'est alors qu'il faut imaginer l'expérience qui va vérifier ou rejeter l'hypothèse ainsi suggérée. Par exemple, dans les années 1980, on essayait d'expliquer les limites de la croissance de populations microbiennes vivant dans les sols. L'hypothèse en vogue était la compétition avec la microflore du sol, jusqu'à ce qu'un modèle suggère la présence d'un prédateur. Cette présence fut vérifiée et la coupable trouvée : une simple amibe. L'actualité nous fournit un autre exemple, élémentaire pour l'objet, mais gigantesque pour l'expérience, la recherche des composantes fondamentales de la matière prévues par le « modèle standard » de la physique des particules, et singulièrement aujourd'hui le populaire boson de Higg.

⁶ Par exemple, le temps moyen de vie d'une espèce chimique ou biologique, l'échelle spatiale où son action est sensible, du planétaire pour le CO₂ et en moyenne un temps de résidence de l'ordre du siècle, au local pour une population bactérienne du sol, avec une durée de génération de quelques heures à quelques jours.

L'expérience est coûteuse ; on peut espérer qu'elle confirmera le modèle ou du moins qu'elle nous permettra d'en savoir plus.

Les sciences de la vie sont encore modestes ; le grand progrès réside dans l'intégration de la modélisation dans la démarche expérimentale, comme l'exemple ci-dessus le montre. Mais, comme nous l'avons aussi évoqué, l'élaboration de modèles plus ambitieux est à l'ordre du jour.

Comme nous l'avons vu, les sciences de l'homme et de la société découvrent pour une grande part la modélisation. Le lien avec l'observation semble bien établi, mais les possibilités d'expérimentation sont très limitées, pas pour des raisons techniques mais pour des considérations liées à la non répliquabilité et, bien sûr, éthiques. On peut cependant profiter « d'expériences accidentelles », pour confronter les résultats réels avec ceux prévus par le modèle. Cette démarche est promue en écologie en profitant de perturbations non prévues ni voulues, comme les dommages causés à un écosystème par un événement météorologique et le suivi qu'on peut faire, ensuite, du retour à un « état normal ».

La modélisation est-elle une discipline ?

Cette question n'a finalement que peu d'intérêt. Il est clair que, dispersée dans ses efforts, participant plus de la méthode que d'une discipline et développée pendant longtemps de façon plus ou moins indépendante, dans divers domaines scientifiques, les modélisateurs se sont réunis plus ou moins spontanément, pour partager leur expérience et mettre au point un corpus méthodologique commun. Les programmes interdisciplinaires du CNRS ont joué un certain rôle en la matière. Munis d'objets de recherche bien identifiés, les modèles, et d'une méthodologie propre d'élaboration et d'utilisation de ces modèles, la modélisation n'a de sens que dans ses relations avec les autres disciplines. C'est une méthodologie partagée et en pleine dynamique.

Les succès de la modélisation ancrent définitivement cette démarche dans l'approche scientifique. Peut-être demain n'y aura-t-il pas de science sans modèle, ni de démarche scientifique sans modélisation.

Références

- Blasco F. (Ed.) 1996. *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*. Actes des journées du Programme Environnement, Vie et Sociétés. Elsevier.
- Caseau P. (Ed.) 2003. *Études sur l'environnement. De l'échelle du territoire à celle du continent*. Académie des Sciences, Tech&Doc, Lavoisier.
- Dahan-Dalmedico A. 2005. *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception entre recherche, industrie et politique*, Éditions La Découverte, coll. Histoire des Sciences/Textes à l'appui, Paris.
- Geymonat G., Lions J.-L. 2002. Rôle des instruments mathématiques et numériques dans la modélisation. *Bulletin de l'APMEP*, 441, 457-466.
- Legay J.-M. 1997. *L'expérience et le modèle. Un discours sur la méthode*. Sciences en question. INRA Editions, Paris.
- Lions J.-L. 1997. Modélisation mathématique et environnement – Quelques remarques. . In “*Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*” (F. Blasco, Ed.). Elsevier, Paris, 79-90.
- Pavé A. 1994. *Modélisation en biologie et en écologie*. Aléas, Lyon.
- Pedro G. (Ed.) 2007. *Les cycles biogéochimiques et écosystèmes continentaux*. Académie des Sciences. EDP Sciences.
- Pumain D. (Ed.) 2006. *Hierarchy in Natural and Social Sciences*. Methodos series, Springer.
- Schmidt-Lainé Cl. (Ed.) 1996. *Modélisation de la combustion*. CNRS, Paris
- Schmidt-Lainé Cl. et Pavé A. 2002 Environnement : modélisation et modèles pour comprendre, agir et décider dans un contexte interdisciplinaire. *Natures, Sciences, Sociétés : Sciences pour l'ingénierie de l'environnement* 10 : s.1, 5-25.
- Theillier M. (Ed.) 2006. Modélisation de systèmes complexes en agronomie et environnement. *Académie des Sciences, Comptes rendus, série Biologies*, 329 :1.
- Yoccoz J.C. (Ed.) 2005. *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain*. Académie des sciences. Tech&Doc, Lavoisier.

Le modèle de Fibonacci

Fac-similé de la page du *Liber abaci* de Léonard de Pise, dit Fibonacci, publié la première fois en 1202.



C'est le premier modèle connu de dynamique des populations. Aujourd'hui, il a surtout une valeur historique, encore que sa version matricielle peut être considérée comme un exemple simple de modèle de Leslie, dont la théorie a été publiée en 1945, cette même classe de modèles étant la version déterministe d'un processus de ramification à 2 états.

Le texte traduit est le suivant⁷ :

Combien de couples de lapins sont créés par un couple en une année

Un quidam a un couple (une paire) de lapin dans un enclos, et on souhaite savoir combien sont créés à partir du couple en un an quand il est dans leur nature de porter un autre couple en un seul mois, et le second mois ceux nés peuvent porter aussi. Parce que le couple précédent portèrent le premier mois, vous le doublerez ; il y aura deux couples en un mois. L'un d'eux, à savoir le premier, porte le second mois et alors, il y a le second mois 3 couples ; de ceux-là en un mois 2 sont gestants, et dans le troisième mois 2 couples de lapins sont nés, et donc il y a 5 couples dans le mois ; dans ce mois 3 paires sont gestants, et dans le quatrième mois il y a 8 couples, de ceux-là 5 couples portent 5 autres couples ; ils s'ajoutent au 8 couples faisant 13 couples dans le cinquième mois ; ces 5 couples qui son nés pendant ce mois ne se croisent pas durant ce mois, mais 8 autres couples sont gestants, et donc il y a dans le sixième mois 21 couples ; à ceux-là sont ajoutés les 13 couples qui sont nés durant le septième mois ; il y aura alors 34 couples dans ce mois ; à cela est ajouté les 21 couples qui sont nés dans les huit mois ;

parium	1
primus	2
Secundus	3
tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sestus	21
Septimus	34
Octauus	55
Nonus	89
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

il y aura 55 couples dans ce mois ; à ceux-là sont ajoutés les 34 couples qui sont nés dans le neuvième mois ; il y aura 89 couples dans ce mois ; à ceux là sont ajoutés encore 55 couples qui sont nés dans le dixième mois ; il y aura 144 couples dans ce mois ; à ceux-là sont encore ajoutés 89 couples qui sont nés dans le onzième mois ; il y aura 233 paires dans ce mois. A ceux là sont toujours ajoutés les 144 couples qui sont nés dans le dernier mois ; il y aura 377 et tous ces couples sont produits à partir du couple écrit ci-dessus dans le lieu mentionné à la fin d'une année. Vous pouvez en effet voir dans la marge comment nous avons opéré, à savoir nous avons ajouté le premier nombre au second, c'est-à-dire le 1 au 2, et le second au troisième, et le troisième au quatrième, et le quatrième au cinquième, et donc l'un après l'autre jusqu'à ce que nous ayons ajouté le dixième au onzième, c'est-à-dire le 144 au 233, et nous avons la somme des lapins écrite ci-dessus, c'est-à-dire 377, et donc vous pouvez dans l'ordre la trouver pour un nombre interminable de mois.

⁷ Ce texte a été traduit à partir d'une transcription en latin et de sa traduction en anglais obtenues toutes les deux sur le site : <http://www.math.utah.edu/~beebe/software/java/fibonacci/liber-abaci.html>



Expressions modernes de ce modèle

On peut en donner trois versions :

- 1- La version classique sous forme d'une suite entière : $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ (avec comme conditions initiales : $U_{-1} = U_0 = 1$), où U_n représente le nombre de lapins au temps n .
- 2- La version matricielle faisant apparaître deux classes d'âges (jeune immatures et adultes matures), implicites dans l'exposé de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} J \\ A \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ A \end{pmatrix}_{n-1} \text{ avec } \begin{pmatrix} J \\ A \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } n = 1, 2, \dots$$

- 3- Une version « non standard » tirée de la théorie des langages de Lindemayer.

On se donne les règles : $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{a}$ et $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{aj}$ où \mathbf{a} représentant un couple de lapins adultes, matures et pouvant se reproduire, et \mathbf{j} un couple de jeunes lapins, immatures, ne pouvant pas se reproduire, et devenant mature à l'intervalle de temps suivant la naissance.

À partir de ces règles, on engendre une suite de symboles en les appliquant à tous ces symboles à chaque temps 1, 2, 3... avec comme condition initiale : \mathbf{a} . On obtient la suite

Temps	Population	Nombre d'adultes	Nombre de jeunes	Nombre total
0	a	1	0	1
1	aj	1	1	2
2	aja	2	1	3
3	ajaaj	3	2	5
4	ajaajaja	5	3	8
5	ajaajajaaj	8	5	13
6	ajaajajaajaajaja	13	8	21
7	ajaajajaajaajaajaajaaj	21	13	34
...

On notera que le nombre de couples d'adultes suit aussi une suite de Fibonacci, comme celui du nombre de couples de jeunes.

Nous espérons que le lecteur sera sensible au progrès du langage mathématique depuis Fibonacci, qui lui même a été l'un des premiers, en occident chrétien, à introduire et à utiliser le système de numération arabe qui fut un immense progrès. Pour cette raison aussi, il est bien normal de lui rendre cet hommage.